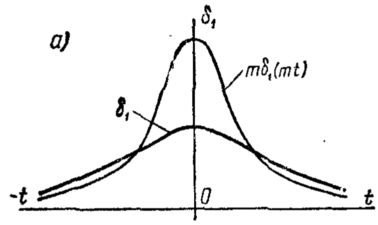
ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 5

Рассмотрим некоторые типовые сигналы.

1) *Дельта-функция* ***δ(t)****, или функция Дирака. Это непрерывная функция времени, дающая бесконечно короткий импульс в нулевой момент времени с бесконечно большой амплитудой и площадью, равной единице.* Таким образом, учитывая, что площадь вычисляется, как интеграл, имеем формулы:



а

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

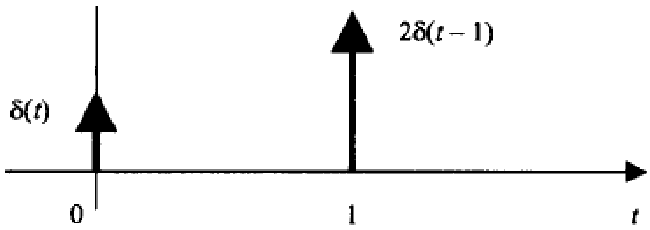


Рисунок 3.1– Дельта-функция *δ(t)*

Отметим, что дельта-функция – это непрерывная функция времени, которая в нулевой момент времени дает «всплеск» (рисунок 3.1, а). В пределе амплитуда этот «всплеска» уходит в бесконечность, а его длительность стремится к нулю при сохранении единичной площади под графиком функции. Находят применение разные формулы для реализации дельта-функции, все они в пределе дают одинаковый результат.

Примеры таких функций: $\delta(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}$; $\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\alpha\to 0}\alpha e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$.

Если интеграл (площадь) в формуле для дельта-функции должен быть равен не единице, а, скажем, числу *a*, то это запишется через дельта-функцию, как $a \cdot \delta(t)$.

Дельта-функция может быть сдвинута по оси времени на заданную величину t_1, это запишется так: $\delta(t - t_1)$. Например, график суммы двух дельта-функций $\delta(t) + 2\delta(t - t_1)$ изображен на рисунке 3.1. При $t = 0$ аргумент первой дельта-функции равен нулю, и в этот момент за счет первого слагаемого возникает дельта-импульс. При $t = 1$ аргумент второй дельта-функции равен нулю, и в этот момент за счет второго слагаемого возникает второй дельта-импульс удвоенной амплитуды (коэффициент два перед вторым слагаемым). Это отражено на рисунке 3.1.

Дельта-функцию нельзя реализовать физически, но это – удобная математическая абстракция, она широко используется при анализе сигналов и систем.

Одно из важных свойств дельта-функции – так называемое фильтрующее свойство. Оно состоит в том, что *если дельта-функции присутствует под интегралом в качестве* *сомножителя, то результат интегрирования будет равен значению остального подынтегрального выражения в той точке, где сосредоточен дельта-импульс.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\cdot dt = x(t_0) \qquad (3.5)$$

Преобразование Фурье от дельта-функции. Это преобразование может быть легко вычислено благодаря фильтрующему свойству дельта-функции. Действительно, с учетом (3.5) и того, что $e^{-j\omega\cdot 0} = 1$ можно записать

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1.$$

Таким образом, преобразование Фурье от дельта-функции представляет собой константу, то есть спектр дельта-функции является равномерным в бесконечно широкой полосе частот.

2) *Функция единичного скачка $\sigma(t)$, или функция Хэвисайда.* График функции показан на рисунке 3.2.

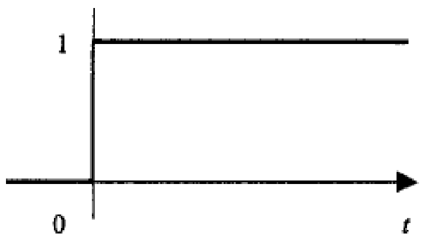


Рисунок 3.2 – Функция единичного скачка $\sigma(t)$

Это также удобная математическая абстракция, так как идеальный скачек реализовать нельзя. Эту функцию также удобно использовать при анализе сигналов и систем. Функция единичного скачка есть интеграл от дельта-функции (фильтрующее свойство дельта-функции, см. выражение (3.5)). Дельта-функция есть производная от функции единичного скачка.

3) Гармоническая функция. Выражается функцией синуса или косинуса, то есть

$$x(t) = A\sin\omega t\ ,\ x(t) = A\cos\omega t, \qquad (3.6)$$

Эта функция пояснений не требует. Широко используется комплексная гармоническая функция $\dot{x}(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$.

Рассмотрим комплексную гармоническую функцию более подробно. Эта функция, благодаря своей простоте и удобству преобразований, наиболее удобна для приложений. Она получается из вещественной формы с применением формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j\sin x$. У нас $x(t)$ может быть вещественной функцией, как же получается комплексная форма? Это получается путем следующих преобразований. Можно записать на основании формулы Эйлера

$$e^{jx} + e^{-jx} = \cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x = 2\cos x,$$

откуда имеем

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}). \qquad (2.10)$$

Здесь e – основание натуральных логарифмов, e = 2,718… . В (2.10) мы вещественную функцию выразили через комплексные функции.

3.2 Описание непрерывных динамических систем

Мы рассмотрели сигналы, теперь рассмотрим описание систем, которые преобразовывают эти сигналы.

Условно динамическая система изображена на рисунке 3.3. Входных и выходных сигналов может быть несколько.

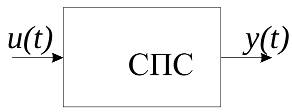


Рисунок 3.3 – Система преобразования сигналов

Здесь обозначены входные сигналы через $u(t)$, выходные – через $y(t)$. Система реагирует на входные сигналы. Эта реакция проявляется в изменении во времени выходных сигналов в ответ на изменение входных сигналов. Но выходной сигнал нашей системы не повторяет входной, он отличается от входного сигнала как по форме, так и по амплитуде. Тем не менее, каждой траектории входного сигнала соответствует определенная траектория сигнала на выходе. Это значит, что система является динамической и ее работа описывается оператором. Изменение выходных сигналов в ответ на изменение входных сигналов мы будем называть *откликом*, или *реакцией* системы на входные сигналы.

Линейность и стационарность динамической системы позволяют легко найти реакцию системы на любой входной сигнал, зная лишь одну характеристику этой системы. Эта характеристика может быть по-разному представлена в зависимости от способа рассмотрения и порождает ряд подобных характеристик. Рассмотрим эти характеристики. Прежде всего, это импульсная характеристика.

3.2.1 Импульсная переходная функция.

Используя фильтрующее свойство дельта-функции (3.5), любой входной сигнал может быть представлен сверткой самого себя с дельта-функцией

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\cdot d\tau. \qquad (3.7)$$

Напомним, что дельта-функция равна всюду нулю, кроме момента τ, где дельта-функция претерпевает скачек, поэтому правая часть равна левой части (3.7). С другой стороны, поскольку интегрирование – это суммирование, то выражение (3.7) показывает, что входной сигнал может быть представлен суммой дельта-функций с амплитудой $u(t)$, сдвинутых во времени. Поскольку система линейная, и для нее справедлив принцип суперпозиции, то, чтобы получить реакцию этой линейной системы на любой входной сигнал, достаточно знать реакцию системы на дельта-функцию. Эта реакция называется импульсная переходная функция, или импульсная характеристика, она обозначается *w(t)*. Итак: *импульсная переходная функция, или импульсная характеристика системы w(t) – это реакция системы на входной сигнал в виде дельта-функции*. Реакция линейной системы при изменении амплитуды дельта-функции пропорционально изменяется, не изменяя ее формы. Отметим, что *w(t)* является функцией. Суммируя реакции системы на сдвинутые во времени дельта-функции с амплитудой *x(t)* и переходя в пределе к интегралу, получаем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot d\tau \tag{3.8}$$

Это формула называется формулой свертки входного сигнала с импульсной характеристикой системы. Итак: *выходной сигнал системы равен свертке входного сигнала с импульсной характеристикой системы*. Как вычисляется *w(t)* – мы рассмотрим позже.

3.2.2 Переходная функция.

Переходной характеристикой называется реакция системы на входной сигнал в виде функции единичного скачка. Обозначается переходная характеристика, как *h(t)*. Поскольку дельта-функция – это производная от единичного скачка, то

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} w(\tau) \cdot d\tau \ . \tag{3.9}$$

3.2.3 Комплексный коэффициент передачи

Выполним преобразование Фурье свертки (3.8). Из свойств преобразования Фурье известно, что это преобразование от свертки дает произведение спектров сворачиваемых сигналов. Спектром импульсной характеристики системы является преобразование Фурье от этой характеристики. Таким образом, преобразуя (3.8), получаем

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \cdot \dot{W}(\omega). \tag{3.10}$$

Здесь $\dot{W}(\omega)$ – преобразование Фурье от импульсной характеристики системы:

$$\dot{W}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \tag{3.11}$$

Эта важная для применения функция называется комплексным коэффициентом передачи системы. Итак: *комплексным коэффициентом передачи системы – это преобразование Фурье от импульсной характеристики системы*.

Модуль $\left|\dot{W}(\omega)\right|$ *называется амплитудно-частотной характеристикой системы (АЧХ), фаза* $\arg\left(\dot{W}(\omega)\right)$ *называется фазо-частотной характеристикой системы (ФЧХ).*

3.2.4 Дифференциальные уравнения

Мы выяснили, что основной характеристикой системы является импульсная переходная функция, или импульсная характеристика системы *w*(*t*). Однако импульсная переходная функция – непараметрическая характеристика, она является просто функцией времени. Как реализовать эту функцию с помощью технических устройств? Наоборот, зная структуру и параметры системы, как найти *w(t)*? Ответы на эти вопросы дает описание системы в виде дифференциального уравнения. Это – второй способ описания систем.

Связь между входным и выходным сигналами линейной системы с сосредоточенными параметрами может быть выражена в виде обыкновенного линейного дифференциального уравнения (ОЛДУ). Оно имеет вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + ... + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \tag{3.12}$$

Здесь *u(t)* – входной сигнал, *y(t)* – выходной сигнал, a_i , b_i – постоянные коэффициенты. Значение *n* называется порядком ДУ. Для физически реализуемой системы должно быть выполнено $m \le n$. Из (3.12) следует, что фактически ОЛДУ задается набором коэффициентов a_i , b_i. Отличие разных линейных ОЛДУ – только в коэффициентах. Реализовать систему с помощью технических устройств можно, если она представлена в виде дифференциального или разностного уравнения.

Если задать конкретный вид входного сигнала *u(t)*, то (3.12) будет неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Решение этого ОЛДУ даст выходной сигнал *y(t)*. В частности, можно получить, что если на вход подать дельта-функцию, то на выходе получим импульсную характеристику системы *w(t)*.

3.2.5 Функция передачи, или передаточная функция

Если применить к обеим частям ОЛДУ (3.12) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, то, используя свойства преобразования Лапласа, получим

$$\begin{aligned} &a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + ... + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = \\ &= b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + ... + b_1 s u(s) + b_0 u(s) \end{aligned}. \tag{3.13}$$

Вынося за скобки в левой части $y(s)$, в правой части $x(s)$ и решив полученное уравнение относительно отношения $y(s)/u(s)$, имеем

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}. \tag{3.14}$$

Функция $W(s)$, как известно, называется функцией передачи, или передаточной функцией системы. Она не зависит от входного сигнала и полностью характеризует систему, описываемую ОЛДУ (3.12). Итак: *передаточная функция системы – это отношение изображений по Лапласу выходного сигнала к входному сигналу, при нулевых начальных условиях*.

Если в (3.14) выполнить подстановку $s = j\omega$, то мы получим уже знакомую нам функцию – комплексный коэффициент передачи, но выраженную параметрически, то есть через параметры системы

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + ... + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + ... + a_1 (j\omega) + a_0}. \tag{3.15}$$

Итак: *комплексный коэффициент передачи системы получается, если в передаточной функции системы выполнить подстановку* $s = j\omega$.

3.2.5 Нули, полюсы и вычеты передаточной функции системы

Передаточная функция (3.14) является отношением полиномов. Из математики известно, что каждый из этих полиномов можно разложить на множители. Выполнив такое разложение, получим

$$W(s) = k\frac{(s-z_m)(s-z_{m-1})...(s-z_2)(s-z_1)}{(s-p_n)(s-p_{n-1})...(s-p_2)(s-p_1)}. \tag{3.16}$$

Здесь $k = b_m / a_n$ – коэффициент усиления, z_i – нули передаточной функции, p_i – полюсы передаточной функции. В точках нулей, то есть при $s = z_i$, $W(z_i) = 0$, в точках полюсов $W(p_i) = \infty$. Нули находят путем приравнивания числителя (3.7) к нулю и решения полученного алгебраического уравнения, полюса находят аналогичным приравниванием к нулю знаменателя (3.7). Нули и полюсы могут быть действительными или составлять комплексно-сопряженные пары.

Отметим, что если в системе можно выделить интегратор, это соответствует нулевому полюсу.

Еще одним способом преобразования передаточной функции (3.7) является ее представление в виде суммы простых дробей. При отсутствии кратных (одинаковых) полюсов такое представление имеет вид

$$W(s) = \frac{r_n}{(s-p_n)} + \frac{r_{n-1}}{(s-p_{n-1})} + ... + \frac{r_2}{(s-p_2)} + \frac{r_1}{(s-p_1)} + C_0. \tag{3.17}$$

Здесь по-прежнему p_i – полюсы передаточной функции. Числа r_i называются вычетами. C_0 – целая часть, она отлична от нуля, если $m = n$. Вычеты, соответствующие комплексно-сопряженным полюсам, также являются комплексно-сопряженными.

Вычеты можно найти следующим образом. Приводят выражение (3.17) к общему знаменателю. Числитель полученного выражения равен числителю (3.14). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *s* обоих числителей, находят вычеты. Есть и другие методы определения вычетов.

При наличии кратных (одинаковых) полюсов передаточной функции ее разложение на сумму простых дробей сложнее. Каждый *l*-кратный полюс дает *l* слагаемых следующего вида

$$\frac{r_{i1}}{(s-p_i)} + \frac{r_{i2}}{(s-p_i)^2} + ... + \frac{r_{il}}{(s-p_i)^l}. \tag{3.18}$$

3.2.5 Расчет импульсной характеристики *w(t)*

Из теории линейных ДУ известно, что импульсную характеристику проще всего найти, используя представление передаточной функции в виде суммы простых дробей. Каждое слагаемое вида $r_i/(s-p_i)$ даст слагаемое импульсной характеристики вида $r_i e^{p_i t}, t \geq 0$. Каждая пара комплексно-сопряженных полюсов даст пару слагаемых в виде комплексно-сопряженных экспонент указанного вида. Эта пара, в свою очередь, может быть преобразована в косинусоиду с экспоненциально изменяющейся амплитудой.

$$r_i e^{p_i t} + r_i^* e^{p_i^* t} = 2|r_i| e^{\mathrm{Re}(p_i)t} Cos(\mathrm{Im}(p_i)t + \arg(r_i)). \tag{3.19}$$

Каждый l-кратный полюс дает в импульсной характеристике l слагаемых следующего вида

$$r_{i1}e^{p_i t}+r_{i2}te^{p_i t}+r_{i3}\frac{t^2}{2}e^{p_i t}+\ldots+r_{il}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}e^{p_i t}. \tag{3.20}$$

В общем случае импульсная характеристика представляет собой сумму

$$w(t)=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k_i=1}^{l_i} r_i\frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}e^{p_i t}, \tag{3.21}$$

где p_i – полюсы передаточной функции; r_i – вычет, соответствующий полюсу p_i; l_i – кратность полюса p_i.

3.2.6 Представление системы в пространстве состояний

Любую систему можно характеризовать совокупностью переменных, изменяющихся во времени. Каждый набор таких переменных можно представить, как элемент некоторого пространства. Естественно выбрать такой набор переменных, который бы полностью характеризовал нашу систему. Такой набор переменных образует пространство состояний.

Итак: *Пространством состояний системы называется такое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы*.

Представление системы в пространстве состояний широко используется в современных методах анализа и синтеза систем управления.

Известно, что если система описывается дифференциальным уравнением n-го порядка, то пространство состояний этой системы будет иметь размерность n.

Итак: *Размерность пространства состояний, соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению, равна порядку этого уравнения.*

Для представления в пространстве состояний исходное дифференциальное уравнение преобразовывают в систему дифференциальных уравнений первого порядка так, чтобы в левых частях системы были только производные, а в правых частях – алгебраические выражения. Это представление часто называют формой Коши. Переменные, по которым берутся производные, являются переменными состояния. Выходных переменных всегда меньше, чем переменных состояния, они обычно могут не совпадать с переменными состояния и связаны с ними алгебраическими уравнениями, называемыми уравнениями выхода.

Уравнения состояния и выхода системы с одним входом и одним выходом (3.12)

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u(t) \tag{3.12}$$

имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+Bu\\&y=C\vec{x}\end{aligned}\right\}. \tag{3.22}$$

Здесь $\vec{x}=[x_1x_2\ldots x_n]^T$ – вектор состояния, A, B, C – матрицы соответствующих размерностей.

Эти матрицы для уравнения (3.12) могут быть записаны следующим образом

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \dots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}; \quad (3.23) \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (3.24)$$

$$C=\begin{bmatrix} \dfrac{b_0}{a_n} & \dfrac{b_1}{a_n} & \dots & \dfrac{b_m}{a_n} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25),$$

В (3.22) первое уравнение называется уравнением состояния, последнее уравнение – уравнением выхода. Следует заметить, что представление (3.22) в виде матриц (3.23…3.25) неоднозначно. Изменяя переменные пространства состояний, можно получить другие матрицы и другие уравнения в этом пространстве. Но соотношения между входом и выходом системы при этом остаются неизменными.

Если у нас система имеет несколько входов и несколько выходов, то система в пространстве состояний записывается так же, как и (3.22), но входной переменной будет уже вектор $\vec{u}$, а выходной также вектор $\vec{y}$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= A\vec{x} + B\vec{u} \\ \vec{y} &= C\vec{x} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.26)$$

Это чрезвычайно компактная запись сложной многомерной системы. Другими преимуществами представления систем в пространстве состояний являются возможность исследовать динамические свойства системы алгебраическими методами и приспособленность к машинному решению ДУ. Действительно, из (3.26) следует, что производные и выход, следовательно, и свойства системы, полностью определяются алгебраическими соотношениями в правой части.

Итак: *преимуществами представления систем в пространстве состояний являются компактность записи, возможность исследовать динамические свойства системы алгебраическими методами и приспособленность к машинному решению ДУ.*